**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2014-2015

UE de Géométrie

---

**Feuille d'exercices n$^{o}$ 2 : Applications affines**

---

**Exercice 1.** On considère $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, $P_0$ le plan d'équation $z = 0$ et $P_1$ le plan d'équation $z = 1$. On désigne par $\mathbf{P}^\star$ l'ensemble des droites vectorielles supplémentaires de $P_0$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Faire une figure.
2. Donner une bijection de $\mathbf{P}^\star$ sur $P_1$. En déduire, en revenant à la définition en terme de translations, que $\mathbf{P}^\star$ est un espace affine de direction $P_0$.
3. *Question*$^\star$ *:* En quoi $\mathbf{P}^\star$ diffère-t-il de la sphère unité $S_2$ de $\mathbb{R}^3$?.
   *[Penser à la projection stéréographique.]*

**Exercice 2.** Soit $X$ un espace affine réel de direction $V$, $f : X \longrightarrow X$ une application affine et

$$X_f := \{x \in X,\ f(x) = x\}$$

l'ensemble des points fixes de $f$.

1. Montrer que $X_f \subset X$ est soit vide soit un sous-espace affine de $X$ dont on déterminera la direction.
2. Soit $D$ une droite affine. Montrer que si $f : D \to D$ est affine et admet deux points fixes, alors $f$ est l'application identité.
3. Soit $P$ un plan affine et $D, D' \subset P$ deux droites affines distinctes, sécantes en $O \in P$ et de directions respectives $k\vec{u}$, $k\vec{u}'$. Au point $M = O + \overrightarrow{OM} = O + x\vec{u} + y\vec{u}'$ on associe $p(M)$ défini par $\overrightarrow{Op(M)} = x\vec{u}$. L'application $p$ est la projection sur $D$ parallèlement à $D'$.
   (a) Faire un dessin de la situation.
   (b) Montrer que $p$ est une application affine.
   (c) Déterminer l'ensemble des points fixes de $p$.
   (d) Une application affine $f : P \to P$ admettant deux points fixes est-elle l'identité ?
4. Soient $A, B, C$ trois points non alignés du plan $P$. On note
   $h_1$ la projection sur la droite $(BC)$ parallèlement à la droite $(CA)$,
   $h_2$ la projection sur la droite $(CA)$ parallèlement à la droite $(AB)$,
   $h_3$ la projection sur la droite $(AB)$ parallèlement à la droite $(BC)$.
   On pose $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ et $f = h \circ h$.
   (a) Faire une figure.
   (b) Montrer que la restriction de $f$ à la droite $(AB)$ est l'identité. Qu'est l'application $f : P \to P$ ?

**Exercice 3** (Symétries affines)**.** Une application affine $\sigma : X \to X$ telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$ est appelée une symétrie de $X$.

1. Soit $M$ un point de $X$. Montrer que le point milieu du segment $[M, \sigma(M)] := \{M + t\,\overrightarrow{M\sigma(M)},\ t \in [0,1]\}$ est un point fixe de $\sigma$.
2. Donner l'ensemble des points fixes de $\sigma$.
3. Donner deux sous-espaces $L_\sigma$ stables $V_+$ et $V_-$ tels que $\overrightarrow{X} = V_+ \oplus V_-$.
4. En guise de conclusion, donner $\sigma(M)$ pour tout $M \in X$.
5. Illustration : esquisser les symétries de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ en fonction de la dimension du sous-espace de ses points fixes.

**Exercice 4** (Symétries-suite)**.** Soit $P_1, \cdots P_n$, $n$ points de l'espace affine $X$. On se pose la question suivante :
*Peut-on trouver $n$ points $M_1, \cdots, M_n$ de $X$ tels que pour tout $i \leq n-1$, $P_i$ soit le point milieu du segment $[M_i, M_{i+1}]$ et $P_n$ le point milieu du segment $[M_n, M_1]$ ?*
Voici une manière de répondre.
On dit que $\sigma$ est une symétrie de centre $P$ si $P$ est l'unique point fixe de $\sigma$. Soit $\sigma_i$ la symétrie de centre $P_i$.

1. Montrer que pour tout $i \geq 2$, $M_i = \sigma_{i-1} \circ \sigma_{i-2} \circ \cdots \circ \sigma_1(M_1)$.
   En déduire que la question admet une solution ssi $\sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_1$ admet un point fixe.
2. Montrer que si $n$ est impair alors il y a une solution unique.
3. Si $n$ est pair, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une solution. Est-elle unique ?
4. Illustration sur $\mathbb{R}^2$ : Faire la construction explicite pour $P_1 = (-1,1), P_2 = (0,1/2), P_3 = (1,1), P_4 = (1,-1), P_5 = (-1,-1)$ ainsi que pour l'hexagone régulier.
5. Déduire qu'étant donnés trois points $P, Q, R$, il existe un unique triangle dont les milieux des côtés sont ces points.
6. Montrer que pour que quatre points soient les milieux des côtés d'un quadrilatère il faut et il suffit qu'ils soient les sommets d'un parallélogramme.

**Exercice 5.** Soit $(X, V)$ un espace affine de direction $V$ de dimension $n$ sur $\mathbb{R}$.

1. Décrire l'ensemble des applications affines de $X$ qui transforment toute droite en une droite parallèle.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des bijections affines $f$ de $X$ pour lesquelles $L_f = \rho\, Id_V$, $\rho \in \mathbf{k}^\star$, est un sous-groupe du groupe affine $GA(X)$.
   Ce sous-groupe est appelé le *groupe des homothéties-translations* de $X$.
3. Décrire $GA(X)$ lorsque $n = 1$.
4. Montrer que $h \in \mathcal{H} \setminus \{Id_X\}$ admet un point fixe $I$ ssi $\rho \neq 1$; montrer que $I$ est l'unique point fixe de $h$.
   On dit que $\rho$ est le rapport et $I$ le centre de l'homothétie $h$.

5. Pour rappel, on dit que deux applications $f, f' : X \to X$ commutent si quel que soit $x \in X$, $f(f'(x)) = f'(f(x))$.
   Deux éléments $h, h' \in \mathcal{H} \setminus \{Id_X\}$ commutent-ils ?

6. Montrer que si les points $A, B, C$ sont alignés alors il existe $h \in \mathcal{H}$ telle que $h(A) = A$ et $h(B) = C$. Une telle application $h$ est-elle unique ?

7. *Un théorème de Desargues*
   Utiliser les homothéties-translations pour démontrer l'énoncé suivant :
   *Soient $ABC$ et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles.*

**Exercice 6** (Extrait du partiel d'avril 2006). Soient $\mathcal{E}$ un plan affine de direction $E$ muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$ et $h, h'$ deux homothéties de $\mathcal{E}$ de rapports respectifs $\rho \neq 1$ et $\rho' \neq 1$ et de centres $I, I'$ avec $I \neq I'$.

1. (a) Montrer que quel que soit $m \in \mathcal{E} \setminus \{I\}$, $I$ appartient à la droite $(m\, h(m))$.
   (b) On suppose $\rho\rho' \neq 1$. Montrer que le centre $I''$ de l'homothetie $h \circ h'$ appartient à la droite $(I\, I')$. (On ne demande pas d'expliciter $I''$.)

2. (a) Soient $C = \{m \in \mathcal{E} \mid (\overrightarrow{cm} \mid \overrightarrow{cm}) = R^2\}$ le cercle de centre $c$ et de rayon $R$ et $h$ une homothétie de $\mathcal{E}$ (de centre $I$ et de rapport $\rho$). Montrer que $h(C)$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
   (b) Soient $C$ et $C'$ deux cercles de $\mathcal{E}$ de centres $c$ et $c'$ et de rayons $R$ et $R'$ avec $R \neq R'$. Montrer qu'il y a exactement deux homothéties $h^{\pm}$ ($h^+$ de rapport positif et $h^-$ de rapport négatif) telles que $h^{\pm}(C) = C'$.
   (c) En considérant les images $h^{\pm}(D)$ de la droite $D$ de la figure annexe 1, donner une construction géométrique simple des centres $I^{\pm}$ des homothéties $h^{\pm}$.

3. On considère à présent trois cercles $C_1, C_2, C_3$ de $\mathcal{E}$ de centres et de rayons respectifs $c_1, c_2, c_3$; $R_1, R_2, R_3$ (centres et rayons deux à deux distincts). Soient $h_i^{\pm}, 1 \leq i \leq 3$, les homothéties telles que
   $$h_3^{\pm}(C_1) = C_2, \quad h_1^{\pm}(C_2) = C_3, \quad h_2^{\pm}(C_3) = C_1.$$
   On notera $I_i^{\pm}$ les centres de $h_i^{\pm}$, $1 \leq i \leq 3$.
   (a) Représenter les six centres d'homothéties $I_i^{\pm}$ sur la figure annexe 2.
   (b) Déterminer $h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^-$.
   (c) En déduire que les points $I_1^-, I_2^+, I_3^-$ sont alignés.
   (d) En procédant par analogie, montrer que les points $I_1^+, I_2^+, I_3^+$ sont alignés.

**Exercice 7** (Extrait du partiel d'avril 2004)**.** Soit $\mathcal{P}$ un plan affine réel. On se donne quatre droites de $\mathcal{P}$ telles que deux quelconques d'entre elles ne soient pas parallèles et trois quelconques d'entre elles ne soient pas concourantes. Soit $(A, B, C, D, E, F)$ l'ensemble de leurs six points d'intersection avec : $A, B, C$ alignés, de même que $C, D, E$ ; $E, F, B$ ; $A, F, D$.

1. Faire une figure.

Soit $I$ (resp. $J$, resp. $K$) le milieu de $A$ et $E$ (resp. $B$ et $D$, resp. $C$ et $F$). Soient $h$ l'homothétie de centre $A$ et de rapport 2, $\beta = h(J)$ et $\alpha = h(K)$. Soient $h_1$ l'homothétie de centre $E$ telle que $h_1(F) = B$ et $h_2$ l'homothétie de centre $E$ telle que $h_2(C) = D$.

2. Montrer que $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.
3. (a) Montrer que les droites $(\alpha\, C)$ et $(A\, F)$ sont parallèles ainsi que les droites $(\beta\, B)$ et $(A\, D)$. En déduire que $(\beta\, B)$ et $(\alpha\, C)$ sont parallèles.
   (b) Montrer que $h_1(D)$ est sur la droite $(\beta\, B)$.
   (c) En déduire que l'image par $h_1 \circ h_2$ de la droite $(\alpha\, C)$ est la droite $(\beta\, B)$.
4. En faisant un travail analogue à celui décrit dans la question 3, montrer que l'image par $h_2 \circ h_1$ de la droite $(\alpha\, F)$ est la droite $(\beta\, D)$.
5. En déduire que $h_1 \circ h_2(\alpha) = h_2 \circ h_1(\alpha) = \beta$.
6. Montrer que $E, \beta, \alpha$ sont alignés. En déduire que $I, J, K$ sont alignés.